Inegalităţi fundamentale

Prof. Sandu Dumitru

Liceul Tehnologic „Mihai Viteazu”

Vulcan, Hunedoara

CUPRINS

1 Inegalitatea Cebâşev

Fie $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_n \in$R.

Dacă $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0,$ pentru $i, j = 1,2, \ldots, n$ atunci

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_n b_n) \geq (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n)$$

cu egalitate dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$sau $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$

Demonstraţie:

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0 \Leftrightarrow a_i b_i + a_j b_j \geq a_i b_j + a_j b_i$$

Pentru j=1 avem: $a_i b_1 + a_1 b_1 \geq a_i b_j + a_j b_i$

j=2 avem: $a_i b_i + a_2 b_2 \geq a_i b_2 + a_2 b_i$

……………………………………………………..

j=n avem: $a_i b_i + a_n b_n \geq a_i b_n + a_n b_i$

Adunând membru cu membru aceste inegalităţi, obţinem:

$$n\ a_i b_i + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \geq a_i (b_1 + \ldots. + b_n) + b_i (a_1 + \ldots. + a_n)$$

Pentru i=1 avem:

$$n\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \geq a_1 (b_1 + \cdots + b_n) + b_1 (a_1 + \ldots. + a_n)$$

Pentru i=2 avem:

$$n\ a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_n b_n \geq a_2 (b_1 + \cdots + b_n) + b_2 (a_1 + \cdots + a_n)$$

………………………………………………………………………..

Pentru i=n avem:

$$n\ a_n b_n + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots\ldots + a_n b_n \geq a_n (b_1 + \ldots\ldots + b_n) + b_n (a_1 + \ldots\ldots + a_n)$$

Adunând aceste inegalităţi membru cu membru obţinem:

$$n\ (a_1 b_1 + \ldots\ldots + a_n b_n) + (a_1 b_1 + \ldots\ldots + a_n b_n) \geq 2(a_1 + \ldots\ldots + a_n)(b_1 + \ldots\ldots + b_n) \Leftrightarrow$$

$$\frac{n+1}{2}(a_1b_1+.....+a_nb_n)\geq(a_1+.....+a_n)(b_1+.....+b_n)$$

Deoarece $n\geq\frac{n+1}{2}$ deducem că:

$$n\,(a_1b_1+.....+a_nb_n)\geq(a_1+.....+a_n)\cdot(b_1+.....+b_n)$$

ceea ce reprezintă inegalitatea Cebâşev.

Egalul are loc dacă $a_1=a_2=.......=a_n$ sau $b_1=b_2=......=b_n$.

1.1 Consecinţe ale inegalităţii Cebâşev

1. Dacă $a_i=b_i$ pentru orice $i\geq 2$ si $a_i>0$ inegalitatea se scrie sub forma:

$n\,(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)\geq(a_1+a_2+...+a_n)^2$ care este echivalentă cu:

$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+...+a_n^2}{n}}$, ceea ce reprezintă inegalitatea dintre media aritmetică şi media patratică.

2. Fie $a_1,a_2,...,a_n,\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},.....,\frac{1}{a_n}>0$. Deoarece $(a_i-a_j)(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_j})\leq 0$ pentru orice i,j=1,..,n, atunci inegalitatea Cebâşev se scrie astfel:

$$n\,(a_1\frac{1}{a_1}+a_2\frac{1}{a_2}+..+a_n\frac{1}{a_n})\leq(a_1+...+a_n)(\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n})\Leftrightarrow n^2\leq(a_1+..+a_n)(\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n})$$

adică

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+..+\frac{1}{a_n}}\leq\frac{a_1+a_2+..+a_n}{n}$$

ceea ce reprezintă inegalitatea dintre media armonică şi media aritmetică.

3. Considerăm numerele : $G=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},\ cu\ \ x_i>0$, oricare ar fi i=1,..,n, si

$a_1=\frac{x_1}{G},a_2=\frac{x_1x_2}{G^2},.....a_n=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{G^n}=1,\ si\ \ b_i=\frac{1}{a_i}$, oricare ar fi i=1,..,n

Deoarece a_i si b_i sunt invers ordonate pentru orice i=1,..,n, avem inegalitatea:

$a_1b_1+a_2b_2+..+a_nb_n \le a_1b_n+a_2b_1+...+a_nb_1$.Înlocuind, găsim:

$$n \le \frac{x_1}{G}+\frac{x_2}{G}+.....+\frac{x_n}{G} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+.....+x_n}{n}$$

ceea ce reprezintă inegalitatea dintre media geometrică şi media aritmetică.

4. Pentru orice numere reale invers ordonate $a_1, a_2, ..., a_n$ si $b_1, b_2, ...b_n$ inegalitatea Cebâşev se scrie astfel:

$$n\,(a_1b_1+.....+a_nb_n) \le (a_1+.....+a_n)\cdot(b_1+.....+b_n);n\ge 2$$

Înlocuind a_i cu x_i^2 si b_i cu y_i^2 pentru orice $i\in\{1,...,n\}$, inegalitatea devine:

$$n\,(x_1^2y_1^2+....+x_n^2y_n^2) \le (x_1^2+.....+x_n^2)\cdot(y_1^2+.....+y_n^2) \quad (1)$$

Folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi media patratică a n numere avem:

$$(x_1y_1+....+x_ny_n)^2 \le n\left(x_1^2y_1^2+.....+x_n^2y_n^2\right) \quad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem:

$$(x_1y_1+....+x_ny_n)^2 \le \left(x_1^2+.....+x_n^2\right)\left(y_1^2+....+y_n^2\right)$$

ceea ce reprezintă inegalitatea Cauchy-Buniacovski-Schwarz.

1.2 Aplicaţii

1. Arătaţi că:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{a+b+c}{3} \quad ; a,b,c>0$$

Rezolvare: Înlocuim în inegalitatea Cebâşev pe x_1 cu a^2, x_2 cu b^2, x_3 cu c^2și y_1 cu a , y_2 cu b, y_3 cu c

Aceasta devine: $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c) \Leftrightarrow \dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\geq\dfrac{a+b+c}{3}$

Egalitatea se obţine când $a^2=b^2=c^2$ sau când a = b =c, deci pentru a = b =c

2. Arătaţi că:

$$a^a\cdot b^b\cdot c^c\geq(abc)^{\frac{(abc)}{3}}$$

Rezolvare:

După logaritmare obţinem:

$$3lg\left(a^a\cdot b^b\cdot c^c\right)\geq\lg(abc)^{\frac{(abc)}{3}} \quad \Leftrightarrow$$

$$3\left(a\cdot\lg a+b\cdot\lg b+c\cdot\lg c\right)\geq(a+b+c)(\lg a+\lg b+\lg c)$$

în care recunoaştem inegalitatea lui Cebâşev aplicată tripletelor la fel de ordonate (*a, b, c*) şi (*lga, lgb, lgc*). Egalitatea se obţine atunci când *a*=*b*=*c*.

3. Arătaţi că:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2} \quad ; a,b,c>0$$

Rezolvare:

Folosim inegalitatea lui Cebâşev pentru tripletele (*a, b, c*) şi $\left(\frac{1}{b+c};\frac{1}{c+a};\frac{1}{a+b}\right)$ care sunt la fel ordonate şi avem:

(1) $$3\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$$

În inegalitatea :

$$\left(a_1^2+a_2^2+....+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+....+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n\right)^2$$

(Cauchy-Buniacovski-Schwarz),cu $a_i, b_i\in$ R ,i=1,...,n ,

luăm $a_i=\sqrt{x_i}$ *si* $b_i=\dfrac{1}{\sqrt{x_i}}$, oricare ar fi i=1,..,n si $x_i>0$.Înlocuind, obţinem:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)>n^2$$

În această inegalitate luăm $x_1=b+c,\quad x_2=c+a,\ x_3=a+b$ şi ea se transformă în:

$$(b+c+c+a++a+b)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 3^2 \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+c}\right)\geq \frac{9}{2}$$

Din (1) şi (2) deducem:

$3\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{3}{2}$,adică inegalitatea din enunţ.

5. Fie $x,y\geq 0$ cu proprietatea ca $x+y\leq 1$.Să se arate că:

$$\frac{x}{y^2-y+1}+\frac{y}{x^2-x+1}<2$$

Rezolvare:

Presupunem că $x\leq y$.De aici, împreună cu inegalitatea din ipoteză obţinem:

$$(y-x)(y+x-1)\leq 0$$

$$y^2+xy-y-xy-x^2+x\ \leq 0$$

$$y^2-y\leq x^2-x\ \Leftrightarrow$$

$$y^2-y+1\leq x^2-x+1\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{y^2-y+1}\geq\frac{1}{x^2-x+1}$$

Conform inegalităţii lui Cebâşev, rezultă:

$$\frac{x}{y^2-y+1}+\frac{y}{x^2-x+1}\leq\frac{x}{x^2-x+1}+\frac{y}{y^2-y+1}<2\,.$$

Inegalitatea este strictă deoarece $\frac{x}{x^2-x+1}=1\ si\ \frac{y}{y^2-y+1}=1\ \Rightarrow x=y=1\Rightarrow\ x+y=2>1$,

ceea ce contrazice ipoteza.

2. Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

Enunţ:

Pentru orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ are loc inegalitatea:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots\ldots+b_n^2)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots\ldots a_nb_n\right)^2$$

Demonstrație:

1)Vom folosi următoarea egalitate, numită identitatea lui Lagrange (care se verifică prin calcul direct):

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots\ldots+b_n^2)=\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots\ldots a_nb_n\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+$$
$$+\left(a_1b_3-a_3b_1\right)^2+\ldots\ldots+\left(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1}\right)^2$$

Din această identitate se observă uşor că inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz se transformă în egalitate dacă:

$$a_1b_2=a_2b_1,\ a_1b_3=a_3b_1,\ldots\ldots\ldots\ldots,a_{n-1}b_n=a_nb_{n-1},$$

adică atunci când $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

Deci, datorită identităţii lui Lagrange, inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz este demonstrată imediat.

(L.Niculescu, Teme de algebră, Editura Cardinal, 1993)

Demonstraţia a 2-a. Pentru început reamintim principiul inducţiei uzuale (cel folosit în manualul de matematică, clasa a-IX-a): fie a ∈ ℕ şi P(n) un predicat peste ℕ.

Dacă P(a) este adevarată și P(n) rezultă P(n+1) , $\forall n\geq a$, atunci P(n) este adevarată pentru orice , $n\geq a$.

Și acum, vom arăta că inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz este adevarată pentru n=2, adică vom arata că:

$$\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2;\forall a_1,a_2,b_1,b_2\in R$$
$$\Leftrightarrow\ a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2\geq a_1^2a_2^2+2a_1a_2b_1b_2+b_1^2b_2^2$$
$$\Leftrightarrow\ a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1a_2b_1b_2\geq 0\ \Leftrightarrow\ \left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2\geq 0.$$

Am arătat deci că P(2) este adevarată (egalitatea are loc dacă $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$).

Presupunem acum că , pentru n>0, $P(n)$ este adevarată şi să demonstrăm că $P(n+1)$ este adevarată, adică:

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_{n+1}^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\dots\dots+a_{n+1}b_{n+1})^2,$$
$$\textit{pentru orice}\quad a_1,\dots,a_{n+1},b_1,\dots,b_{n+1}\in R$$

$$(a_1b_1+a_2b_2+\dots\dots+a_{n+1}b_{n+1})^2=(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2+a_{n+1}^2b_{n+1}^2+$$
$$2a_{n+1}b_{n+1}(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)\leq(a_1^2+a_2^2+\dots\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots\dots+b_n^2)+a_{n+1}^2b_{n+1}^2+$$
$$+2a_{n+1}b_{n+1}-(a_1b_1+a_2b_2+\dots\dots+a_nb_n)$$

Pentru a finaliza este nevoie să verificăm inegalitatea

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)+a_{n+1}^2b_{n+1}^2+2a_{n+1}^2b_{n+1}^2(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)\leq$$
$$\leq(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2+a_{n+1})(b_1^2+b_2^2+\dots\dots+b_{n+1}^2)$$

După calcule şi reduceri, ea devine:

$$2(a_{n+1}b_{n+1}(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)\leq a_{n+1}^2(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)+b_{n+1}^2(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a_1b_{n+1}-a_{n+1}b_1)^2+(a_2b_{n+1}-a_{n+1}b_2)^2+\dots\dots+(a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n)^2\geq 0$$

adevarată

Deci, inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz, a fost demonstrată cu ajutorul inducţiei matematice. Inegalitea Cauchy-Buniakovski-Schwarz devine egalitate dacă $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots\dots=\frac{a_n}{b_n}$.

În matematică, inegalitatea Cauchy-Buniacovski-Schwarz este utilă în mai multe situaţii. În algebra liniară ea se poate aplica vectorilor, în analiză se poate aplica seriilor infinite sau integrării produselor, iar in teoria probabilităţilor se poate aplica varianţelor şi covarianţelor. Inegalitatea pentru sume a fost publicată de

Louis Cauchy în 1821 iar inegalitatea pentru integrale a fost formulată iniţial de Viktor Buniakovski în 1859 şi a fost redescoperită de Hermann Schwarz în 1888.

2.1 Consecinţe ale inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz

1.Înlocuind $a_i = \sqrt{x_i}$; $b_i = \frac{1}{\sqrt{x_i}}$: $x_i > 0$, oricare ar fi i=1,..,n, găsim următoarea inegalitate:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

ceea ce reprezintă inegalitatea dintre media armonică şi media aritmetică.

2. Înlocuind $a_i = 1$ şi $b_i = x_i$, i=1,…,n , găsim:

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} ; x_i > 0$$

;i=1,…,n,

ceea ce reprezintă inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică. Inegalitatea devine egalitate dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

3. Facind substituţiile $b_i = a_i x_i$; i=1,…,n obţinem:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + \dots + a_n^2 x_n^2) \geq (a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_n^2 x_n)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + \dots + a_n^2 x_n^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq \left(\frac{a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_n^2 x_n}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \right)^2$$

pentru orice $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$.

Notăm $p_i = a_i^2, \forall\, i = 1, \dots, n$, $f(x) = x^2 ; x \in R$ şi inegalitatea devine:

$$\frac{p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)+\dots+p_n f(x_n)}{p_1+p_2+\dots+p_n} \geq f\left(\frac{p_1x_1+\dots+p_nx_n}{p_1+p_2+\dots+p_n}\right)$$

ceea ce reprezintă inegalitatea Jensen în cazul în care funcţia *f* este convexă şi $p_i>0$; oricare ar fi i=1,…,n.

Un caz particular remarcabil al acestei inegalităţi se obţine pentru $p_1=p_2=\dots=p_n=1$ și anume: $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)$.

2.2 . Aplicaţii

1.Arătaţi că: $\frac{x_1}{3x_2+x_3}+\frac{x_2}{3x_3+x_4}+\frac{x_3}{3x_4+x_1}+\frac{x_4}{3x_1+x_2}\geq 1$,unde $x_1, x_2, x_3, x_4>0$.

Soluţie: Conform inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem:

$$[x_1(3x_2+x_3)+x_2(3x_3+x_4)+x_3(3x_4+x_1)+x_4(3x_1+x_2)]\bullet\left(\frac{x_1}{3x_2+x_3}+\frac{x_2}{3x_3+x_4}+\frac{x_3}{3x_4+x_1}+\frac{x_4}{3x_1+x_2}\right)$$
$$\geq (x_1+x_2+x_3+x_4)^2$$

Ne mai rămâne de arătat că:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \geq x_1(3x_2+x_3)+x_2(3x_3+x_4)+x_3(3x_4+x_1)+x_4(3x_1+x_2)$$

Inegalitate care este adevărată deoarece este echivalentă cu

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \geq x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+$$
$$+(x_4-x_1)^2\geq 0$$

Egalul este atins când $x_1=x_2=x_3=x_4$

2. Fie x,y,z trei numere reale pozitive astfel încât $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2$. Arătaţi că $8xyz\leq 1$.

(Gazeta Matematică 5/2007)

Rezolvare:

Folosim inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz pentru fiecare fracţie din egalitatea dată astfel:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+x\right)\left(2+2+\frac{1}{x}\right)\geq (1+1+1)^2 \Leftrightarrow (1+x)\left(4+\frac{1}{x}\right)\geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x}\leq\frac{1}{9}\left(4+\frac{1}{x}\right)$$

Analog :

$$\frac{1}{1+y}\leq\frac{1}{9}\left(4+\frac{1}{y}\right)$$
$$\frac{1}{1+z}\leq\frac{1}{9\left(4+\frac{1}{z}\right)}$$

Adunând cele trei inegalităţi, obţinem:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+}\leq\frac{1}{9}\left(12+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Înlocuind $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2$ vom găsi:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 6 \Leftrightarrow xy+x+yz\geq 6xyz \quad (1)$$

Eliminând numitorii în relaţia din ipoteză şi efectuând calculele, vom găsi:

$$xy+xz+yz=1-2xyz \ (2).$$

Din (1) şi (2) obţinem: $1-2xyz\geq 6xyz$ sau $8xyz\leq 1$.

3.Pentru orice numere pozitive a,b,c cu abc=1,arătaţi că:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Soluţie: Făcând substituţiile $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$ inegalitatea din enunţ devine:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}$$,unde xyz=1 şi x,y, z>0.

Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem:

$$[(y+z)+(z+x)+(x+y)]\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right) \geq (x+y+z)^2.$$

De aici deducem: $\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right) \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}$

(Am folosit inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică)

3. Folosirea inegalităților în rezolvarea unor ecuații, sisteme de ecuații

3.1 Aplicații

1. Rezolvați ecuația:

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(2+\sqrt{x^2-1}\right) = 4\ .$$

Soluție: x > 0

$x^2 - 1 \geq 0$ <=> $|x| \geq 1$ <=> $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ <=>
<=> $x \in [1, +\infty)$

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$ și $2+\sqrt{x^2-1} \geq 2$, deci $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(2+\sqrt{x^2-1}\right) \geq 4$ <=>
<=> $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(2+\sqrt{x^2-1}\right) = 4$ dacă $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} = 2$ și $2 + \sqrt{x^2-1} = 2$ => *x = 1*

$S = \{1\}$

2. Rezolvați ecuația:

$$x^4+\frac{1}{x^4} = \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Soluție: oricare ar fi $a \in \mathrm{R}-\{0\}$, $a^2+\frac{1}{a^2} \geq a+\frac{1}{a}$

<=> $a^4+1 \geq a^3+a$ <=> $a^4-a^3-a+1 \geq 0$ <=> $(a^3-1)(a-1) \geq 0$

<=>$(a-1)^2(a^2+a+1) \geq 0$. Egalitate pentru *a = 1*

Pentru oricare ar fi *x > 0* $x^4+\frac{1}{x^4} \geq x^2+\frac{1}{x^2} \geq x+\frac{1}{x} \geq \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ <=> $x^4+\frac{1}{x^4} = \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ <=> $x = 1$

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} x^2+u = yz \\ y^2-u = xz \\ z^2 = xy \\ x^3+y^3+z^3+u^3 = -3 \end{cases}$$

Din primele trei ecuații:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \ =>$$

$$=> \quad x = y = z \ => \ x^2 + u = x^2 \ => u = 0$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = -3 \\ x = y = z \end{cases} \qquad => \ x = y = z = -1$$

4. Fie $x, y \in$ R astfel încât $x^2 + y^2 = x + y + 1$. Determinați valoarea maximă și minimă a numerelor x și y.

   Soluție: $4x^2 + 4y^2 = 4x + 4y + 4 \ <=> \ 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 6$

$$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 = 6 \quad => \begin{cases} (2x-1)^2 \le 6 \\ (2y-1)^2 \le 6 \end{cases} \ =>$$

$$\Big|2x - 1| \le \sqrt{6} \quad <=> \begin{cases} -\sqrt{6} \le 2x - 1 \le \sqrt{6} \\ \frac{1-\sqrt{6}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

   Analog $\frac{1-\sqrt{6}}{2} \le y \le \frac{1+\sqrt{6}}{2}$.

3.2 Probleme propuse

1) $2 \le \frac{x}{[x]} + \frac{[x]}{x} < \frac{5}{2}$, oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$
   unde cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x
2) a) $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < 1$
   b)$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} < 2$, oricare ar fi $n \geq 2$
   c)$\sqrt{2} + \sqrt{6} + \cdots + \sqrt{n(n+1)} < \frac{n(n+2)}{2}$, oricare ar fi n număr natural, $n \neq 0$
3) $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$,oricare ar fi x număr real
4) $\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{9} + \cdots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}$
5) $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} \ge \sqrt{2}(x + y + z)$, oricare ar fi x,y,z numere reale
6) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$, oricare ar fi x număr real
7) Dacă $a,b,c > 0$, astfel încât $a + b + c = 2\sqrt{abc}$, atunci $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{abc}$.
8) Dacă $a,b,c > 0$ cu $a + b + c = 1$, atunci $a^2 + b^2 + c^2 < 1$.
9) Să se arate că $\frac{1\cdot2}{3^2} + \frac{2\cdot3}{5^2} + \frac{3\cdot4}{7^2} + \cdots + \frac{999\cdot1000}{1999^2} < 2 \cdot 5^3$.
10) Oricare ar fi x,y,z > 0 avem:

$$\frac{x}{x+2y+2z}+\frac{y}{y+2x+2z}+\frac{z}{z+2y+2x}\geq\frac{3}{5}$$

11) $abc(a+b+c)\leq a^4+b^4+c^4$, a,b,c numere reale

12) Oricare ar fi x,y,z numere reale avem:

$$3x^2+3y^2+3z^2+12\geq 4\sqrt{3}(x+y+z)$$

13) Oricare ar fi a,b,c numere reale, pozitive, nenule avem:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

14) Demonstrați că dacă $x,y,z\in(0,+\infty)$, atunci :

$$\frac{1}{x+2y+3z}+\frac{1}{y+2z+3x}+\frac{1}{z+2x+3y}\geq\frac{3}{2(x+y+z)}$$

15) Aflați numerele reale x cu proprietatea că $|x+1|+|x-1|=2$.

Bibliografie

1. Liliana Niculescu, Editura Cardinal, Craiova, 1993 - “Teme de algebră”

2. Ion Vîrtopeanu, Editura Sidech, Craiova, 1999 - „Metode de rezolvare a problemelor de algebră”

3. Mihai Onucu Drâmbe, Editura Gil, Zalău, 2003 - „Inegalităţi, idei şi metode”

4. M. Lascu, Editura Gil, Zalău,1994 - „ Inegalităţi”

5. Manual clasa IX-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1986

6. M. Becheanu , B. Enescu – Inegalităţi elementare… şi mai puţin elementare , Editura Gil.

7. Buşneag D. , Leonte A., Vladimirescu, I. – Culegere de probleme pentru admiterea în învăţământul superior şi perfecţionarea profesorilor de matematică din învăţământul preuniversitar, Editura Sitech, Craiova, 1993

8. Probleme de matematică traduse din revista KVANT – Bucureşti, 1983 ;

9. Colecţia Gazeta Matematică - 1971-2010.