

Probleme de colorare

Steluța Monea ⁽¹⁾ & Mihai Monea ⁽²⁾

REZUMAT. Acest material, cu caracter introductiv, se adresează elevilor din clasele IV-V care doresc să se pregătească în vederea participării la olimpiada de matematică. Materialul a fost prezentat în cadrul taberei care se desfășoară cu ocazia etapei finale a concursului ViitoriOlimpici.

⁽¹⁾ – profesor, Colegiul Național DECEBAL, Deva, smmonea@yahoo.com

⁽²⁾ – profesor, Colegiul Național DECEBAL, Deva, mihaimonea@yahoo.com

Introducere

Problemele de colorare reprezintă o temă foarte des întâlnită în concursurile școlare. De aceea, acest material dorește să prezinte câteva exemple, ușor de înțeles, de orice elev de clasa a V-a.

Din punct de vedere tehnic, aceste probleme se pot soluționa fie prin construcție directă a soluției, fie prin utilizarea unor principii matematice cunoscute, cum ar fi principiul cutiei. Următoarea problemă este sugestivă în acest sens:

Problema 1. *Toate punctele de pe o foaie de hârtie se colorează cu una dintre culorile roșu sau albastru. Demonstrați că putem construi un segment care să aibă capetele de aceeași culoare.*

Prima soluție. Aceasta este o soluție prin care construim concret segmentul căutat. Astfel, alegem la întâmplare un segment cu capetele oarecare. Dacă aceste capete sunt la fel colorate, atunci problema este rezolvată. În caz contrar, alegem la întâmplare un punct interior acestui segment, de exemplu mijlocul său. Se obțin astfel două segmente, dintre care unul are capetele de aceeași culoare. \square

A doua soluție. Folosim principiul cutiei și alegem la întâmplare 3 puncte. Atunci, cel puțin două vor avea aceeași culoare. Le unim și obținem un segment ca în problemă. \square

Nu toate problemele se pot rezolva în ambele metode, fiecare problemă având specificul său. Sunt cazuri în care trebuie să combinăm cele două variante, cum ar fi problema care urmează.

Problema 2. *Toate punctele de pe o foaie de hârtie se colorează cu una dintre culorile roșu sau albastru. Demonstrați că putem construi un triunghi care să aibă toate vârfurile de aceeași culoare.*

Soluție. Pentru un triunghi avem nevoie de trei puncte. Conform principiului cutiei, numărul minim de puncte pe care trebuie să îl alegem pentru a fi siguri că avem cel puțin trei de aceeași culoare, este 5. Doar că trebuie ca aceste trei puncte să nu fie pe aceeași linie. De exemplu, putem alege 5 puncte situate pe același cerc. \square

Probleme rezolvate

În a doua parte a acestui material, prezentăm o selecție de probleme, pe care le considerăm extrem de utile pentru formarea unor deprinderi inițiale în această temă extrem de frumoasă, dar dificilă.

Problema 3. *Toate punctele de pe o foaie de hârtie se colorează cu una dintre culorile roșu, galben, verde sau albastru. Se alege la întâmplare câteva puncte și se unesc oricare două, formându-se toate segmentele posibile. Care este numărul minim de puncte pe care*

trebuie să îl alegem pentru a fi siguri că vom avea cel puțin un segment cu capetele de aceeași culoare?

Soluție. Avem patru culori la alegere. Dacă alegem un număr de puncte cel mult egal cu 4, atunci pot fi puncte de culori diferite. Prin urmare, sunt necesare minim 5 puncte. \square

Problema 4. *Toate punctele de pe o foaie de hârtie se colorează cu una dintre culorile roșu, galben sau albastru. Demonstrați că putem construi un triunghi care să aibă toate vârfurile de aceeași culoare.*

Soluție. Avem la dispoziție trei culori. Pentru un triunghi sunt necesare trei puncte. Șase puncte pot fi alese astfel încât să avem câte două de fiecare culoare. Dacă avem șapte puncte, atunci sigur avem cel puțin trei de aceeași culoare. Deci numărul minim ar fi șapte. Trebuie însă să ne asigurăm că se obține triunghiul și atunci putem alege cele șapte puncte ca fiind situate pe un cerc. \square

Problema 5. *Se consideră o mulțime formată din 6 puncte reprezentate de vârfurile unui triunghi și mijloacele laturilor sale. Aceste puncte se colorează. Care este numărul minim de culori utilizate pentru a nu putea forma un triunghi cu vârfuri de aceeași culoare?*

Soluție. Evident putem realiza o colorare cu trei culori, având câte două puncte de aceeași culoare. Dacă folosim doar două culori, găsim trei puncte de aceeași culoare care nu sunt pe aceeași latură și care pot forma un triunghi. Deci numărul minim de culori este 3. \square

Problema 6. *Se consideră o mulțime formată din 6 puncte reprezentate de vârfurile unui dreptunghi și mijloacele a două laturi opuse. Aceste puncte se colorează. Care este numărul minim de culori utilizate pentru a nu putea forma un triunghi cu vârfuri de aceeași culoare?*

Soluție. Evident putem realiza o colorare cu trei culori, având câte două puncte de aceeași culoare. Spre deosebire de problema anterioară, putem folosi doar două culori, dacă colorăm la fel capetele unei laturi și mijlocul său. Deci numărul minim este doi. \square

Problema 7. *Toate punctele de pe o foaie de hârtie se colorează cu una dintre culorile roșu sau albastru. Demonstrați că putem construi un segment care să aibă vârfurile și mijlocul de aceeași culoare.*

Soluție. Putem alege un segment, având capetele de aceeași culoare, conform primei probleme. Să presupunem că sunt roșii. Dacă mijlocul e roșu atunci problema este finalizată. În caz contrar, fie A, B capetele și C mijlocul. Fie D, E mijloacele segmentelor AC și CB . Dacă aceste puncte sunt simultan albastre, atunci segmentul DE este soluția problemei noastre.

Dacă ambele sunt roșii, atunci construiesc F, G , mijloacele segmentelor AD și EB . Dacă unul dintre puncte este roșu atunci este mijlocul unui segment cu capete roșii. Dacă ambele sunt albastre, atunci segmentul FG este soluția problemei.

Presupunem că unul dintre D și E este roșu și celălalt albastru. Fie D cel roșu. Atunci segmentele DB și CE au același mijloc și fiecare are capete de aceeași culoare. Unul dintre ele va fi soluția problemei. \square

Problema 8. *Se consideră o mulțime formată din nouă puncte reprezentate de vârfurile unui pătrat, mijloacele laturilor sale și centrul său. O parte din puncte se colorează cu albastru, iar restul cu roșu. Care este numărul minim de puncte colorate cu albastru astfel încât să fim siguri că găsim un pătrat cu toate vârfurile albastre?*

Soluție. Cele nouă puncte sunt aliniate pe 3 linii și 3 coloane. Trebuie cel puțin patru puncte albastre. Dacă alegem patru puncte, astfel încât trei să fie pe aceeași linie, nu putem forma un pătrat. Nici cinci puncte nu sunt suficiente, deoarece le putem alege pe acelea de pe prima linie și prima coloană. Dacă această alegere o completăm cu un al șaselea punct care nu e în centru sau în colț, atunci observăm că nu ajung nici șase puncte. Șapte puncte pot fi distribuite în două variante generale. Dacă avem două linii sau coloane cu câte 3 puncte atunci putem obține un pătrat. Dacă avem o coloană cu 3 puncte pe mijloc și două cu câte două puncte atunci de asemenea putem obține un pătrat. \square

În încheiere, recomandăm, tuturor celor interesați, să aprofundeze această temă, folosind unele materiale mai avansate cum ar fi cele din bibliografie.

Bibliografie

- [1] I. Cicu, *Principiul cutiei*, Viitori Olimpici 2014-2015, et. 4.
- [2] D. Sitaru, *Probleme de colorare*, Ed. Paralela 45, Pitești, 2010.